

Cuprins

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ	5
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional.....	8
Lecția 2. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical	12
Lecția 3. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	15
Lecția 4. Modulul unui număr real.....	18
Lecția 5. Compararea și ordonarea numerelor reale.....	22
Lecția 6. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări.....	26
Teste de evaluare sumativă	30
Fișă pentru portofoliul elevului.....	31
Lecția 7. Adunarea și scăderea numerelor reale.....	33
Lecția 8. Înmulțirea numerelor reale	37
Lecția 9. Puterea cu exponent număr întreg a numerelor reale	42
Lecția 10. Împărțirea numerelor reale	46
Lecția 11. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$; $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $b > 0$	51
Teste de evaluare sumativă	56
Fișă pentru portofoliul elevului.....	58
Lecția 12. Media aritmetică și media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$	60
Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive	64
Lecția 14. Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	67
Teste de evaluare sumativă	70
Fișă pentru portofoliul elevului.....	72
Probleme din realitatea cotidiană.....	74

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex.....	76
Lecția 2. Paralelogramul	80
Lecția 3. Linia mijlocie în triunghi.....	84
Lecția 4. Centrul de greutate al triunghiului.....	88
Teste de evaluare sumativă	92
Fișă pentru portofoliul elevului.....	94
Lecția 5. Dreptunghiul	96
Lecția 6. Rombul	100
Lecția 7. Pătratul	104
Teste de evaluare sumativă	108
Fișă pentru portofoliul elevului.....	109
Lecția 8. Trapezul. Trapezul isoscel.....	111
Lecția 9. Linia mijlocie în trapez.....	115

Lecția 10. Perimetrul și aria triunghiului.....	119
Lecția 11. Perimetrul și aria patrulaterului	123
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	130
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	132
<i>Probleme din realitatea cotidiană.....</i>	134

CAPITOLUL II. CERCUL

Lecția 12. Unghi înscris în cerc.....	137
Lecția 13. Coarde și arce în cerc	143
Lecția 14. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc.....	147
Lecția 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc.....	152
Lecția 16. Lungimea cercului și aria discului.....	156
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	159
<i>Fișă pentru portofoliul elevului.....</i>	161
<i>Probleme din realitatea cotidiană.....</i>	162

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR.....	165
--	------------

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	172
-------------------------------------	------------

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

- (0,5p) 1. Forma zecimală a fracției ordinare $\frac{3}{4}$ este:
A. 0,5; B. 0,75; C. 0,65; D. 0,8.
- (0,5p) 2. Cel mai mic număr natural prim de două cifre este:
A. 10; B. 15; C. 11; D. 13.
- (0,5p) 3. Suma numerelor raționale pozitive $1\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{6}$ este egală cu:
A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $\frac{5}{6}$; D. $\frac{3}{4}$.
- (0,5p) 4. Suplementul unghiului cu măsura de 78° este unghiul cu măsura de:
A. 160° ; B. 12° ; C. 90° ; D. 102° .
- (0,5p) 5. Rezultatul calculului $(-1)^{2017} + (-1)^{2018}$ este egal cu:
A. 2; B. -2; C. -1; D. 0.
- (0,5p) 6. Soluția inecuației $-3x \leq 9$, unde $x \in \mathbb{Z}$, este:
A. $\{3, 4, 5, \dots\}$; B. $\{-3, -2, -1, \dots\}$; C. $\{\dots, -5, -4, -3\}$; D. $\{\dots, 1, 2, 3\}$.
- (0,5p) 7. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 8 este egal cu:
A. 12; B. 24; C. 48; D. 18.
- (0,5p) 8. Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A și $\sphericalangle B = 4\sphericalangle C$, atunci măsura unghiului C este egală cu:
A. 60° ; B. 30° ; C. 18° ; D. 45° .
- (0,5p) 9. Calculând 40% din 35 obținem numărul:
A. 15; B. 40; C. 70; D. 14.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

- (0,8p) 1. Se consideră triunghiul isoscel ABC . Dacă $AB = 10$ cm și $AC = 4,5$ cm, aflați BC .

2. Se consideră numărul rațional pozitiv $x = \frac{11}{10} - \left[2\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] : \frac{5}{2}$.

(0,8p) a) Arătați că $x = \frac{4}{15}$.

(0,7p) b) Rotunjiți la a doua zecimală numărul rațional pozitiv x .

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional



Citesc și rețin

Definiție: Un număr natural a se numește **pătrat perfect** dacă există un număr natural b , astfel încât $a = b^2$.

Exemple: $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $100 = 10^2$.

Observație: Dacă a , $a \neq 0$, este un număr natural pătrat perfect, atunci există două numere întregi b și $-b$ cu proprietatea că $a = b^2 = (-b)^2$.

Exemple: $1 = 1^2 = (-1)^2$, $4 = 2^2 = (-2)^2$, $9 = 3^2 = (-3)^2$.

Definiție: Rădăcina pătrată a numărului natural pătrat perfect a ($a = b^2$, $b \in \mathbb{Z}$) este numărul natural $|b|$. Notăm $\sqrt{a} = |b|$.

Exemple: $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{19^2} = 19$; $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$.

Observații:

1. Dacă $a = b^2$, $b \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{a} = b$.

2. Dacă $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.



Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\sqrt{25}$;

b) $\sqrt{81}$.

Soluție:

a) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$;

b) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$;

b) $\sqrt{\frac{48}{75}}$.

Soluție:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{7^2}{8^2}} = \frac{7}{8}$;

b) $\sqrt{\frac{48}{75}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \frac{4}{5}$.

3. Determinați cardinalul mulțimii $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{n} \leq 6\}$.

Soluție:

$5 < \sqrt{n} \leq 6$, deci $25 < n \leq 36$, de unde rezultă $A = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$, prin urmare $\text{card } A = 11$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

- a) $16 = \dots\dots\dots$; b) $36 = \dots\dots\dots$; c) $49 = \dots\dots\dots$; d) $64 = \dots\dots\dots$; e) $81 = \dots\dots\dots$;
f) $100 = \dots\dots\dots$; g) $144 = \dots\dots\dots$; h) $196 = \dots\dots\dots$; i) $324 = \dots\dots\dots$; j) $400 = \dots\dots\dots$.

2. Citiți următoarele propoziții:

- a) $\sqrt{25} = 5$; b) $\sqrt{169} = 13$; c) $\sqrt{361} = 19$; d) $\sqrt{81} = 9$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\sqrt{14^2} = 14$; ☐ b) $\sqrt{19^2} = 19$; ☐ c) $\sqrt{41^2} = 41$; ☐
d) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; ☐ e) $\sqrt{(-13)^2} = -13$; ☐ f) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$. ☐

4. Calculați:

- a) $\sqrt{16} = \dots\dots\dots$; b) $\sqrt{25} = \dots\dots\dots$; c) $\sqrt{36} = \dots\dots\dots$; d) $\sqrt{49} = \dots\dots\dots$; e) $\sqrt{64} = \dots\dots\dots$;
f) $\sqrt{100} = \dots\dots\dots$; g) $\sqrt{121} = \dots\dots\dots$; h) $\sqrt{144} = \dots\dots\dots$; i) $\sqrt{225} = \dots\dots\dots$; j) $\sqrt{256} = \dots\dots\dots$.

5. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a) $\sqrt{(-11)^2} = \dots\dots\dots$; b) $\sqrt{(-23)^2} = \dots\dots\dots$; c) $\sqrt{(-59)^2} = \dots\dots\dots$; d) $\sqrt{(-77)^2} = \dots\dots\dots$.

6. Determinați mulțimile:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 7\} = \dots\dots\dots$; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 8\} = \dots\dots\dots$;
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 29\} = \dots\dots\dots$; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 67\} = \dots\dots\dots$.

7. Calculați:

- a) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$; b) $\sqrt{64} - \sqrt{49}$; c) $\sqrt{36} + \sqrt{81}$; d) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$;
e) $\sqrt{81} - \sqrt{36} = \dots\dots\dots$; f) $\sqrt{16} - \sqrt{64} = \dots\dots\dots$.

8. Calculați:

- a) $(\sqrt{225} - \sqrt{36}) \cdot \sqrt{100}$; b) $\sqrt{121} : (\sqrt{25} - \sqrt{256})$; c) $\sqrt{144} : (\sqrt{49} - \sqrt{169})$;
d) $\sqrt{196} : (\sqrt{64} - \sqrt{100}) = \dots\dots\dots$.

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$; ☐ b) $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$; ☐ c) $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$; ☐ d) $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$. ☐

Lecția 7. Adunarea și scăderea numerelor reale



Citesc și rețin

Suma numerelor reale x și y este un număr real unic, notat $x + y$.

Operația prin care se obține suma a două numere reale se numește **adunare**.

Proprietățile adunării:

- comutativitatea: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$;
- asociativitatea: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- 0 este element neutru: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;
- orice număr $a \in \mathbb{R}$ are un opus $-a \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0$.

Diferența numerelor reale x și y este un număr real unic, notat $x - y$, și care reprezintă suma dintre x și opusul lui y , adică $x - y = x + (-y)$.

Reguli de calcul:

- $a\sqrt{n} + b\sqrt{n} = (a + b)\sqrt{n}$, $n > 0$;
- $a\sqrt{n} - b\sqrt{n} = (a - b)\sqrt{n}$, $n > 0$;
- $a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{n} + a_3\sqrt{n} + \dots + a_m\sqrt{n} = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m)\sqrt{n}$, $n > 0$.



Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$;

b) $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$;

c) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$.

Soluție:

a) $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = \sqrt{2}(3 + 7) = 10\sqrt{2}$;

b) $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}(9 - 3) = 6\sqrt{5}$;

c) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = \sqrt{7}(2 - 5) = -3\sqrt{7}$.

2. Calculați:

a) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$;

b) $2\sqrt{63} - 5\sqrt{28}$;

c) $-\sqrt{18} - 3\sqrt{98}$.

Soluție:

a) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} = 5\sqrt{2^2 \cdot 3} + 2\sqrt{3^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$;

b) $2\sqrt{63} - 5\sqrt{28} = 2\sqrt{3^2 \cdot 7} - 5\sqrt{2^2 \cdot 7} = 6\sqrt{7} - 10\sqrt{7} = -4\sqrt{7}$;

c) $-\sqrt{18} - 3\sqrt{98} = -\sqrt{3^2 \cdot 2} - 3\sqrt{7^2 \cdot 2} = -3\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = -24\sqrt{2}$.

3. Calculați: $7\sqrt{24} - 3\sqrt{20} - \sqrt{150} - 2\sqrt{80}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} 7\sqrt{24} - 3\sqrt{20} - \sqrt{150} - 2\sqrt{80} &= 7\sqrt{2^2 \cdot 6} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5^2 \cdot 6} - 2\sqrt{4^2 \cdot 5} = 14\sqrt{6} - \\ &- 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} - 8\sqrt{5} = \sqrt{6}(14 - 5) + \sqrt{5}(-6 - 8) = 9\sqrt{6} - 14\sqrt{5}. \end{aligned}$$



1. Calculați:

p) $(-41) - (-5)$.

o)

d) $\frac{7}{4} - \frac{8}{5}$;

h) $\left(-2\frac{1}{8}\right) + \frac{9}{10}$.

3. Calculați:

f) $0,2(6) - 1,52$.

e)

m) $8\sqrt{3}-15\sqrt{3} = \dots\dots\dots$; n) $4\sqrt{5}-17\sqrt{5} = \dots\dots\dots$; o) $2\sqrt{7}-22\sqrt{7} = \dots\dots\dots$.

f) $-2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$.

Numele și prenumele:
Clasa a VII-a
Capitolul: Mulțimea numerelor reale
Se acordă 10 puncte din oficiu.

(7p) 1. Suma numerelor $x = 2\sqrt{7}$ și $y = -9\sqrt{7}$ este egală cu $-7\sqrt{7}$. A F

(7p) 2. Produsul numerelor $x = 4\sqrt{3}$ și $y = \sqrt{5}$ este egal cu $4\sqrt{15}$. A F

(7p) 3. Raționalizând numitorul raportului $\frac{2}{\sqrt{6}}$, obținem raportul $\frac{\sqrt{6}}{3}$. A F

(7p) 1. Diferența numerelor $x = -\sqrt{5}$ și $y = -\sqrt{125}$ este egală cu

(7p) 2. Câtul numerelor $a = \sqrt{24}$ și $b = 2\sqrt{3}$ este egal cu

(7p) 3. Cubul numărului $x = -\sqrt{2}$ este egal cu

(8p) 1. Rezultatul calculului $\left[-\sqrt{10} + (-2\sqrt{10})^3 \right] : |-9\sqrt{2}|$ este:

A. $2\sqrt{10}$; B. $-3\sqrt{2}$; C. $-9\sqrt{5}$; D. $3\sqrt{10}$.

(8p) 2. Valoarea absolută a numărului real $a = 1, (6) \cdot \left(\frac{11}{2\sqrt{75}} - \frac{8}{\sqrt{48}} \right)$ este egală cu:

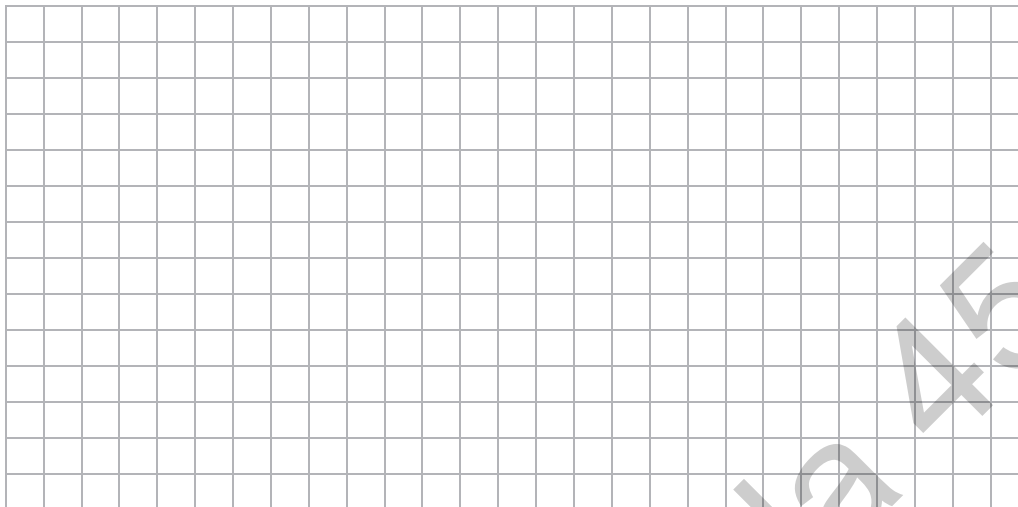
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$; B. $\sqrt{6}$; C. $\sqrt{5}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(8p) 3. Numărul $a = \left(\frac{\sqrt{42}}{2\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{63}}{2\sqrt{5}} \right) : \frac{\sqrt{6}}{8}$ aparține mulțimii:

A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.

(8p) **IV.** Se consideră numărul $a = \left(\sqrt{\frac{0,2(6)}{1,(3)}} : 0,25 - \frac{1}{3\sqrt{5}} \right)^3 : \sqrt{\frac{1,(6)}{1,92}}$. Arătați că numărul $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$.

[illegible]

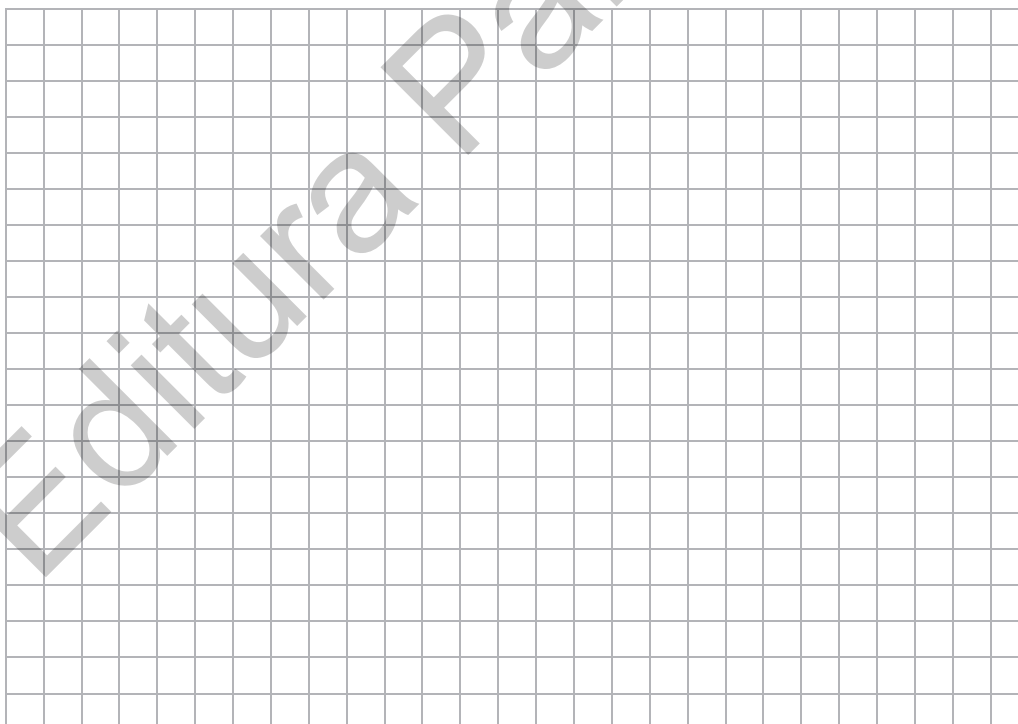


V. Se consideră numerele:

$$x = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}} \text{ și } y = \left(\frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \right) : \frac{1}{3}.$$

(8p) a) Arătați că $x = \sqrt{2}$.

(8p) b) Arătați că $\sqrt{xy} \in \mathbb{N}$.



Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive



Citesc și rețin

Definiție: Media geometrică a numerelor reale **pozitive** a și b este dată de formula $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.

Teoremă: Dacă a și b sunt două numere reale pozitive, atunci $m_a(a; b) \geq m_g(a; b)$. Egalitatea se obține când $a = b$.



Cum se aplică?

1. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor 2 și 8. Comparați cele două medii.

Soluție:

$$m_a = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5; m_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4; m_a = 5 \text{ și } m_g = 4, \text{ prin urmare}$$

$$m_a > m_g.$$

2. Calculați media geometrică a numerelor reale:

a) 3,5 și 4,(6);

b) $5\sqrt{35}$ și $7\sqrt{35}$.

Soluție:

$$\text{a) } m_g = \sqrt{3,5 \cdot 4,(6)} = \sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{14}{3}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 7}{1 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{7^2}{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{b) } m_g = \sqrt{5\sqrt{35} \cdot 7\sqrt{35}} = \sqrt{35 \cdot \sqrt{35}^2} = \sqrt{35 \cdot 35} = \sqrt{35^2} = 35.$$

3. Media geometrică a două numere reale pozitive este egală cu 18. Dacă unul dintre numere este $6\sqrt{2}$, aflați celălalt număr.

Soluție:

Notăm cu x numărul necunoscut; $m_g = 18$, deci $\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x} = 18$, prin urmare

$$\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x}^2 = 18^2 \text{ sau } 6\sqrt{2} \cdot x = 324, \text{ deci } x = \frac{324}{6\sqrt{2}} \text{ sau } x = \frac{\sqrt{2} \cdot 54}{\sqrt{2}} = \frac{54\sqrt{2}}{2} = 27\sqrt{2}.$$



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuțiți litera corespunzătoare soluției corecte. Media geometrică a numerelor 12 și 3 este egală cu:

A. $m_g = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{4} = 2;$

B. $m_g = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6.$

2. Completați tabelul următor:

Numerale	16; 1	1; 25	36; 1	1; 49
Media geometrică				

GEOMETRIE

Capitolul I PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex



Citesc și rețin

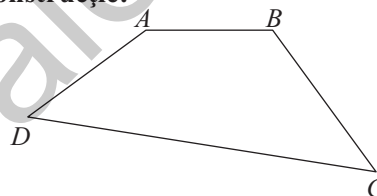
Definiție: Numim **patrulater** de vârfuri A, B, C și D reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup CD \cup DA$, unde punctele distincte A, B, C și D îndeplinesc condițiile:

- oricare trei dintre ele sunt necoliniare;
- $AB \cap CD = \emptyset, BC \cap AD = \emptyset$.

Patrulaterul de vârfuri A, B, C și D se notează $ABCD$.

Definiție: Un **patrulater** se numește **convex** dacă dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate ale acestuia **nu separă** celelalte două vârfuri ale patrulaterului.

Construcție:



Elemente:

- vârfurile patrulaterului: A, B, C, D ;
- laturile patrulaterului: AB, BC, CD, DA ;
- unghiurile patrulaterului: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$;
- diagonalele patrulaterului: AC, BD .

Laturile AB și BC , BC și CD etc. se numesc **alăturate**, iar laturile AB și CD , respectiv BC și DA se numesc **opuse**.

Unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ etc. se numesc **alăturate**, iar unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$ se numesc **opuse**.

Proprietăți:

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .

Definiție: Perimetrul patrulaterului convex $ABCD$ este dat de formula:

$$\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$



Cum se aplică?

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 73^\circ$ și $\sphericalangle C = 135^\circ$, aflați măsura unghiului D .

Soluție:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$, deci $60^\circ + 73^\circ + 135^\circ + \sphericalangle D = 360^\circ$ sau $268^\circ + \sphericalangle D = 360^\circ$, de unde rezultă că $\sphericalangle D = 360^\circ - 268^\circ$ și obținem $\sphericalangle D = 92^\circ$.

2. Calculați perimetrul patrulaterului convex $DEFG$, cu $DE = 7$ cm, $EF = 5$ cm, $FG = 3$ cm și $GD = 6$ cm.

Soluție:

$$P_{DEFG} = DE + EF + FG + GD = 7 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 21 \text{ cm}.$$

3. Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $MNPQ$ știind că $\angle M = 5\angle P$, $\angle N = 2\angle P$ și $\angle Q = 4\angle P$.

Soluție:

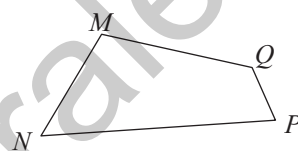
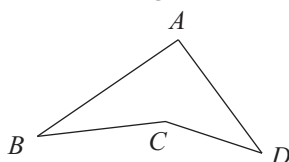
$\angle M + \angle N + \angle P + \angle Q = 360^\circ$, deci $5\angle P + 2\angle P + \angle P + 4\angle P = 360^\circ$, deci $12\angle P = 360^\circ$, de unde rezultă că $\angle P = 360^\circ : 12$ și obținem $\angle P = 30^\circ$; $\angle M = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$; $\angle N = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ și $\angle Q = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.



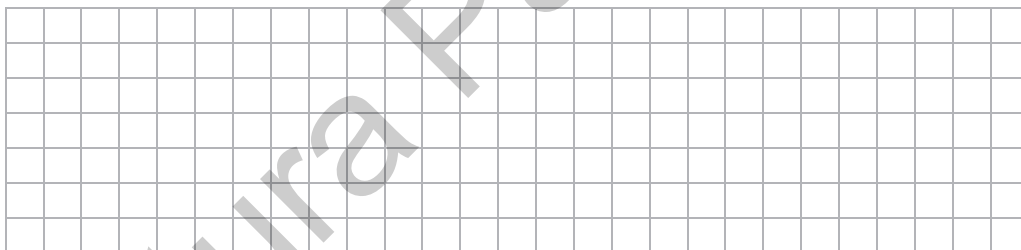
Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Dintre patrulateralele $ABCD$ și $MNPQ$ reprezentate în figurile următoare, cel convex este patrulaterul

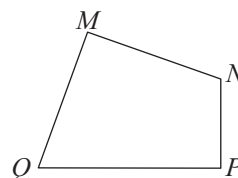


2. Construiește patrulaterul convex $ABCD$ și notează cu O punctul de intersecție al diagonalelor acestuia.



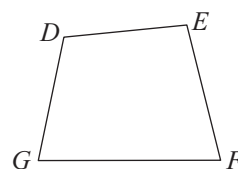
3. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex $MNPQ$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\angle M$ și $\angle N$ sunt alăturate;
- b) $\angle P$ și $\angle Q$ sunt opuse;
- c) $\angle N$ și $\angle Q$ sunt alăturate;
- d) $\angle M$ și $\angle P$ sunt opuse.



4. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex $DEFG$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) laturile DE și FG sunt alăturate;
- b) laturile DG și FG sunt opuse;
- c) laturile DE și EF sunt alăturate;
- d) laturile DG și EF sunt opuse.



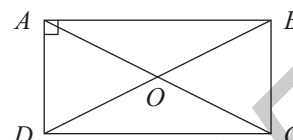
Lecția 5. Dreptunghiul



Citesc și rețin

Definiție: Paralelogramul care are un unghi drept se numește **dreptunghi**.

Construcție:



Proprietăți:

Teorema 1: Cele patru unghiuri ale unui dreptunghi sunt unghiuri drepte.

Teorema 2: Diagonalele dreptunghiului sunt congruente.

Teorema 3: Dacă într-un paralelogram diagonalele sunt congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.

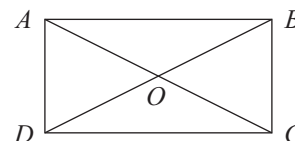


Cum se aplică?

1. În dreptunghiul $ABCD$, notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Dacă $AB = 8$ cm și $\mathcal{P}_{AOB} = 18$ cm, aflați $AC + BD$.

Soluție:

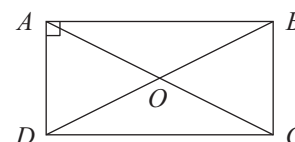
$\mathcal{P}_{AOB} = 18$ cm, deci $AB + AO + OB = 18$ cm sau 8 cm + $AO + OB = 18$ cm, așadar $AO + OB = 10$ cm. Deoarece $AC \equiv BD$, rezultă că $AO \equiv OB$ și $AO + OB = AC$, prin urmare $AC = 10$ cm, și obținem $AC + BD = 20$ cm.



2. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\angle CAD = 43^\circ$, determinați măsura unghiului $\angle COD$.

Soluție:

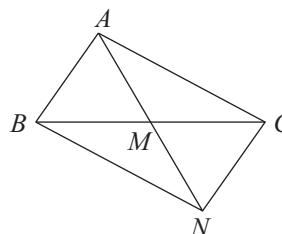
$ABCD$ este dreptunghi, deci $AO \equiv DO$, prin urmare $\angle OAD \equiv \angle ODA$. În $\triangle OAD$ avem $\angle O + \angle A + \angle D = 180^\circ$, așadar $43^\circ + 43^\circ + \angle O = 180^\circ$, de unde obținem $\angle O = 94^\circ$; $\angle COD = \angle AOC - \angle AOD = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$.



3. În triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$ construim mediana AM , $M \in BC$. Arătați că $AM = \frac{BC}{2}$.

Soluție:

Notăm cu N simetricul punctului A față de punctul M . Deoarece $AM \equiv MN$, $BM \equiv MC$ și $\angle BAC = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul $ABNC$ este dreptunghi, deci $AN = BC$, sau $2AM = BC$, prin urmare $AM = \frac{BC}{2}$.



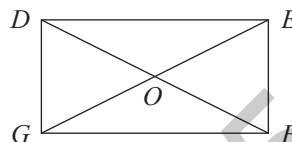


Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $DEFG$ în care am notat cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\angle EDG = 90^\circ$; ☐ b) $DE \equiv GF$; ☐
c) $DG \not\equiv EF$; ☐ d) $DF \equiv EG$. ☐



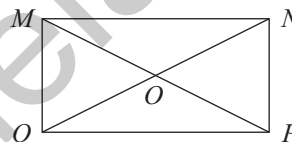
2. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Știind că $AD = 7$ cm și $CD = 11$ cm, completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a) $AB = \dots\dots\dots$; b) $BC = \dots\dots\dots$.



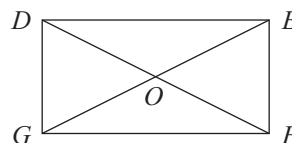
3. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $MNPQ$ în care am notat cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a) $MP = 5$ cm, atunci $NQ = \dots\dots\dots$;
b) $NQ = 7$ cm, atunci $MP = \dots\dots\dots$;
c) $MP = 6$ cm, atunci $NO = \dots\dots\dots$;
d) $QO = 4$ cm, atunci $MP = \dots\dots\dots$.



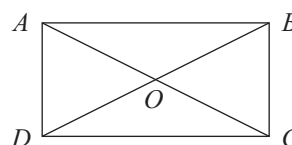
4. În figura alăturată am notat cu O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $DEFG$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $\triangle DOE$ este isoscel; ☐ b) $\triangle EOF$ este isoscel; ☐
c) $\triangle FOG$ este isoscel; ☐ d) $\triangle GOD$ este isoscel. ☐



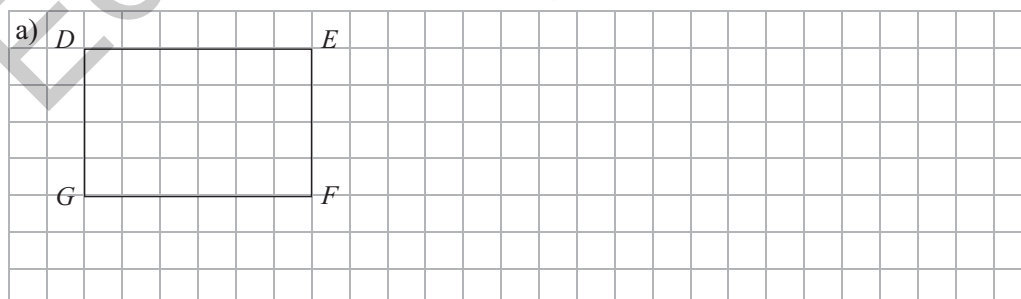
5. În figura alăturată am notat cu O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

- a) Dacă $AC = 10$ cm și $AB = 7$ cm, atunci $\mathcal{P}_{AOB} = \dots\dots\dots$.
b) Dacă $BD = 14$ cm și $BC = 5$ cm, atunci $\mathcal{P}_{AOD} = \dots\dots\dots$.



6. Calculați perimetrul dreptunghiului $DEFG$, știind că:

- a) $DE = 15$ cm și $EF = 8$ cm; b) $DG = 9$ cm și $GF = 16$ cm.





Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (1p) 1. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Știind că:
a) $AC = 7$ cm, aflați BO ; b) $CO = 5$ cm, aflați BD .
- (1p) 2. Se consideră rombul $DEFG$, cu $DE = 5$ cm și $\angle EDG = 70^\circ$. Aflați:
a) $\mathcal{P}_{DEFG}$; b) $\angle DEG$.
- (1p) 3. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor pătratului $ABCD$. Calculați $\angle BAC + \angle COD$.
- (1p) 4. În pătratul $ABCD$, notăm cu M, N, P și Q mijloacele laturilor AB, BC, CD , respectiv DA . Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.
5. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\angle AOB = 3\angle BOC$, aflați:
(1p) a) $\angle BOC$; (1p) b) $\angle BAC$.
6. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor rombului $ABCD$ cu perimetrul de 28 cm și $\angle B = 2\angle A$. Construim $OE \perp AD, E \in AD$. Calculați:
(1p) a) $\angle A$; (1p) b) BD ; (1p) c) AE .

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (1p) 1. Se consideră rombul $ABCD$, cu $AB = 4$ cm și $\angle ABD = 54^\circ$. Aflați:
a) BC ; b) $\angle DBC$.
- (1p) 2. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor pătratului $ABCD$, care are perimetrul de 20 cm. Aflați:
a) $\angle BDC$; b) AD .
- (1p) 3. Arătați că diagonalele dreptunghiului $DEFG$ sunt congruente.
- (1p) 4. Pe cercul $\mathcal{C}(O)$ considerăm punctele A, B și C , astfel încât patrulaterul $OABC$ este romb. Determinați măsurile unghiurilor rombului $OABC$.
5. Se consideră rombul $ABCD$ cu $\angle B = 3\angle A$. Mediatoarele laturilor AB și CD intersectează diagonala AC în punctele E , respectiv F .
(1p) a) Aflați măsurile unghiurilor rombului $ABCD$.
(1p) b) Arătați că patrulaterul $BEDF$ este un pătrat.
6. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\mathcal{P}_{ADC} = 48$ cm, $\mathcal{P}_{ABO} = 36$ cm și $\mathcal{P}_{BCO} = 32$ cm, aflați:
(1p) a) BC ; (1p) b) AB ; (1p) c) BD .

Lecția 8. Trapezul. Trapezul isoscel



Citesc și rețin

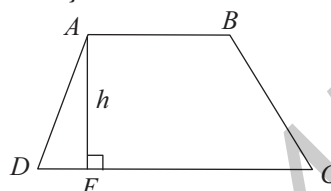
Definiție: Patrulaterul care are două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele se numește **trapez**.

Laturile paralele ale unui trapez se numesc **bazele** trapezului.

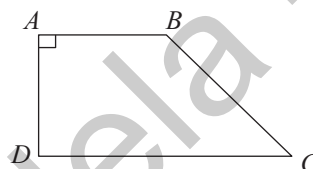
Definiție: Trapezul care are un unghi drept se numește **trapez dreptunghic**.

Definiție: Trapezul care are laturile neparalele congruente se numește **trapez isoscel**.

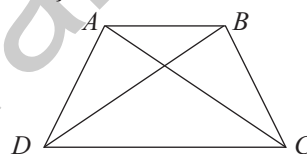
Construcție:



Construcție:



Construcție:



Definiție: Segmentul determinat de punctele de intersecție dintre bazele trapezului și o perpendiculară comună a acestora se numește **înălțimea** trapezului. Lungimea înălțimii se notează cu h .

Proprietăți (trapezul isoscel):

Teorema 1: Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate bazei mari și unghiurile alăturate bazei mici sunt, respectiv, congruente.

Teorema 2: Dacă unghiurile alăturate unei baze a unui trapez sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Teorema 3: Diagonalele trapezului isoscel sunt congruente.

Teorema 4: Dacă un trapez are diagonalele congruente, atunci trapezul este isoscel.

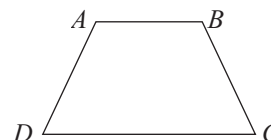


Cum se aplică?

1. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, dacă $\angle A = 3\angle D$.

Soluție:

Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\angle A + \angle D = 180^\circ$ (interne de aceeași parte a secantei AD), deci $3\angle D + \angle D = 180^\circ$, de unde rezultă că $\angle D = 45^\circ$, $\angle A = 135^\circ$. Aplicăm teorema 1: $\angle A \equiv \angle B$ și $\angle C \equiv \angle D$, prin urmare $\angle B = 135^\circ$ și $\angle C = 45^\circ$.

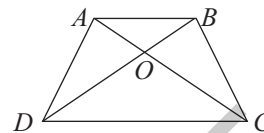


2. Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Arătați că:

- a) $AO \equiv BO$; b) $CO \equiv DO$.

Soluție:

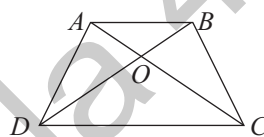
a) Deoarece $ABCD$ este trapez isoscel avem $AD \equiv BC$ și $AC \equiv BD$, deci $\triangle ABD \equiv \triangle BAC$, de unde rezultă că $\angle ABO \equiv \angle BAO$, prin urmare $AO \equiv BO$; b) $OC = AC - AO$ și $OD = BD - BO$, de unde rezultă că $CO \equiv DO$.



3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm și $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, aflați AB .

Soluție:

$\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm, deci $AB + BC + CA = 25$ cm sau $AB + BD + DA = 25$ cm (1); $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, deci $AO + OD + DA = 19$ cm, dar în problema precedentă am arătat că $AO \equiv BO$, deci $BD + DA = 19$ cm și înlocuind în (1) obținem $AB = 6$ cm.

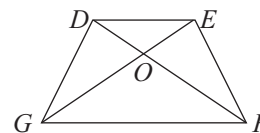


Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

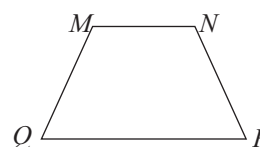
1. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $DEFG$ cu $DE \parallel FG$, în care am notat cu O punctul de intersecție a diagonalelor. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| a) $DE \parallel GF$; | ☐ | b) $DG \parallel EF$; | ☐ |
| c) $DE \equiv GF$; | ☐ | d) $DG \equiv EF$; | ☐ |
| e) $\angle DGF \equiv \angle EFG$; | ☐ | f) $\angle EDG \equiv \angle DEF$; | ☐ |
| g) $DF \equiv EG$; | ☐ | h) $DO \equiv FO$. | ☐ |



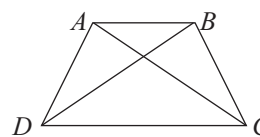
2. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a) $MQ = 3,5$ cm, atunci $NP = \dots\dots\dots$;
b) $NP = 4,7$ cm, atunci $MQ = \dots\dots\dots$.



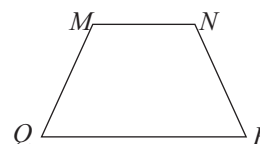
3. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a) $AC = 6,5$ cm, atunci $BD = \dots\dots\dots$;
b) $BD = 3,8$ cm, atunci $AC = \dots\dots\dots$.



4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

- a) $\angle M = 127^\circ$, atunci $\angle N = \dots\dots\dots$;
b) $\angle P = 68^\circ$, atunci $\angle Q = \dots\dots\dots$.



CAPITOLUL II

Cercul

Lecția 12. Unghi înscris în cerc



Citesc și rețin

Definiție: Numim **cerc** de centru O și rază R , notat $\mathcal{C}(O, R)$, mulțimea punctelor din plan situate la distanța R față de punctul O .

Definiție: **Măsura** unui cerc este egală cu 360° .

Definiție: Un unghi care are vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**. (În figura alăturată, unghiul $\angle AOB$ este unghi la centru pentru cercul respectiv.)

Definiții:

1. Mulțimea punctelor de pe un cerc situate în interiorul unghiului $\angle AOB$ se numește **arc mic** AB , notat $\widehat{AB}$.

2. Mulțimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului $\angle AOB$

se numește **arc mare** AB , notat $\widehat{AMB}$, unde M este un punct de pe cerc situat în exteriorul unghiului $\angle AOB$ (pentru ambele arce, punctele A și B se numesc **capete** sau **extremități**).

Observație: Măsura arcului de cerc de extremități X și Y se notează $\widehat{XY}$.

Definiții:

1. Dacă $\widehat{AB}$ este un arc mic, atunci $\widehat{AB} = \angle AOB$.

2. Dacă $\widehat{AMB}$ este un arc mare, atunci $\widehat{AMB} = 360^\circ - \angle AOB$.

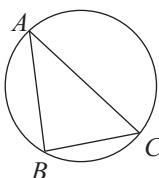
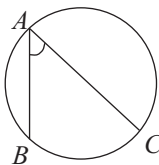
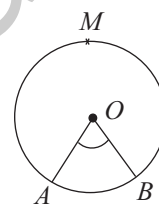
Definiție: Două arce $\widehat{AB}$ și $\widehat{CD}$ ale aceluiași cerc (sau din cercuri congruente) se numesc **congruente**, dacă $\widehat{AB} = \widehat{CD}$; se notează $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

Definiție: Un unghi cu vârful pe cerc și ale cărui laturi sunt două coarde ale cercului se numește **unghi înscris în cerc**.

Teoremă: Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale:

$$\angle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2}.$$

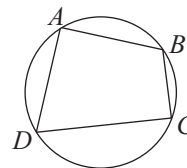
Definiție: Un triunghi se numește **înscris într-un cerc** dacă vârfurile sale aparțin cercului respectiv. În acest caz, spunem că cercul este **circumscriș triunghiului**, centrul său fiind punctul de concurență a mediatoarelor laturilor triunghiului.



Definiție: Un patrulater se numește **patrulater inscriptibil**, dacă există un cerc care conține vârfurile acestuia. Cercul respectiv se numește **cercul circumscris patrulaterului**.

Teoremă: Patrulaterul care are unghiurile opuse suplementare este inscriptibil.

Teoremă: Patrulaterul în care diagonalele formează cu două laturi opuse ale acestuia unghiuri congruente este inscriptibil.



Cum se aplică?

1. Pe un cerc se consideră punctele E și F și punctul D pe arcul mare de extremități E și F .

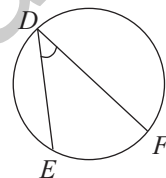
a) Dacă $\widehat{EF} = 56^\circ$, aflați $\angle EDF$.

b) Dacă $\angle EDF = 32^\circ$, aflați $\widehat{EF}$.

Soluție:

$$\text{a) } \angle EDF = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{56^\circ}{2} = 28^\circ; \text{ b) } \angle EDF = \frac{\widehat{EF}}{2}, \text{ deci } 32^\circ = \frac{\widehat{EF}}{2}, \text{ de}$$

unde rezultă că $\widehat{EF} = 32^\circ \cdot 2$ și obținem $\widehat{EF} = 64^\circ$.

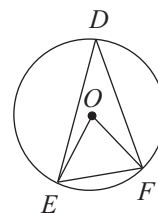


2. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{3} \text{ cm})$ se consideră punctele D, E și F . Știind că $\angle EDF = 30^\circ$, calculați lungimea coardei EF .

Soluție:

$$\angle EDF = \frac{\widehat{EF}}{2} \text{ sau } 30^\circ = \frac{\widehat{EF}}{2}, \text{ de unde rezultă că } \widehat{EF} = 60^\circ, \text{ prin}$$

urmare $\angle EOF = 60^\circ$, deci $\triangle EOF$ este echilateral, prin urmare $EF = R = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.



3. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , știind că măsurile arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ și $\widehat{CA}$ sunt direct proporționale cu numerele 10, 11 și 19.

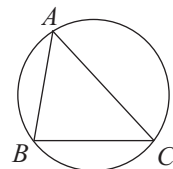
Soluție:

$$\text{Din ipoteză avem } \frac{\widehat{AB}}{10} = \frac{\widehat{BC}}{11} = \frac{\widehat{CA}}{19} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA}}{10 + 11 + 19} = \frac{360^\circ}{40} = 9^\circ, \text{ deci } \frac{\widehat{AB}}{10} = 9^\circ,$$

de unde rezultă că $\widehat{AB} = 90^\circ$ și analog obținem $\widehat{BC} = 99^\circ$ și $\widehat{CA} =$

$$= 171^\circ; \angle A = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{99^\circ}{2} = 49^\circ 30', \angle B = \frac{\widehat{CA}}{2} = \frac{171^\circ}{2} = 85^\circ 30', \angle C =$$

$$= \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$





Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

Măsura cercului este egală cu:

- A. 100° ; B. 180° ; C. 360° ; D. 400° .

2. În figura alăturată este reprezentat cercul $\mathcal{C}(O)$ și unghiul la centru $\angle MON$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) Dacă $\angle MON = 54^\circ$, atunci $\widehat{MN} = \dots\dots\dots$.

b) Dacă $\widehat{MN} = 48^\circ$, atunci $\angle MON = \dots\dots\dots$.



3. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar pe arcul mare de extremități E și F se consideră punctul D . Aflați $\widehat{EF}$ și $\widehat{EDF}$, dacă:

a) $\widehat{EDF} = 5 \widehat{EF}$;

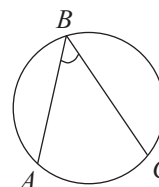
b) $\widehat{EDF} = 4 \widehat{EF}$.



4. În figura alăturată este reprezentat un cerc și unghiul $\angle ABC$ înscris în cercul respectiv. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\angle ABC = \frac{\widehat{AC}}{3}$; ☐

b) $\angle ABC = \frac{\widehat{AC}}{2}$. ☐

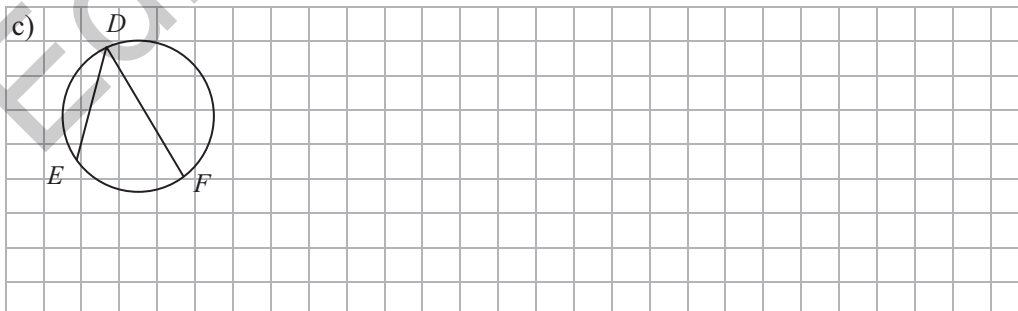


5. Pe un cerc se consideră punctele E și F , iar punctul D este situat pe arcul mare de extremități E și F . Aflați $\angle EDF$, dacă:

a) $\widehat{EF} = 40^\circ$;

b) $\widehat{EF} = 74^\circ$;

c) $\widehat{EF} = 96^\circ$.



Lecția 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc



Citesc și rețin

Definiție: Un poligon care are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente se numește **poligon regulat**.

Teoremă: Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc. Centrul cercului se numește **centrul poligonului regulat**.

Lungimea laturii poligonului regulat cu n laturi se notează l_n .

Definiție: Segmentul construit din centrul unui poligon regulat, perpendicular pe o latură a acestuia, se numește **apotema poligonului regulat**.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este dată de formula $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

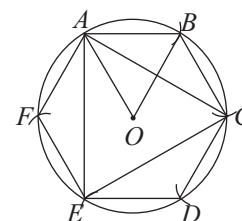
Teoremă: Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu n laturi, notată u_n , este dată de

$$\text{formula } u_n = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

Construcția unui poligon regulat înscris într-un cerc dat

În continuare, prezentăm construcția cu ajutorul compasului și al riglei negradate a hexagonului regulat $ABCDEF$ înscris în cercul dat, $\mathcal{C}(O, R)$.

Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ construim punctul A și, luând în compas o deschidere egală cu R , construim arcul $\widehat{AB}$. $\triangle AOB$ este echilateral, deci $\widehat{AB} = 60^\circ$, prin urmare, construind în același fel arcele $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ și $\widehat{EF}$, cercul a fost împărțit în șase arce de cerc congruente. Cu ajutorul riglei, construim hexagonul regulat $ABCDEF$.



Observație: Triunghiul ACE este echilateral, deci această construcție poate fi utilizată și pentru construcția triunghiului echilateral înscris într-un cerc dat.



Cum se aplică?

1. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu 10 laturi.

Soluție:

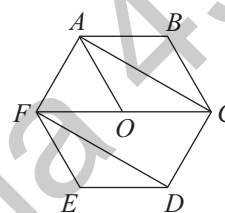
Se aplică formula $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Obținem $S_{10} = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

2. Aflați numărul de laturi ale unui poligon regulat care are unghiurile cu măsura de 135° .

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow 135^\circ = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow n \cdot 135^\circ = n \cdot 180^\circ - 360^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow n \cdot 180^\circ - n \cdot 135^\circ = 360^\circ \Rightarrow n (180^\circ - 135^\circ) = 360^\circ \Rightarrow n \cdot 45^\circ = 360^\circ \Rightarrow n = \\ &= \frac{360^\circ}{45^\circ} \Rightarrow n = 8. \end{aligned}$$

Soluție:

rezultă că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 30^\circ$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCA = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ și analog se arată că $\sphericalangle CAF = 90^\circ$, deci $\sphericalangle FAC + \sphericalangle ACD = 180^\circ$ (interne de aceeași parte a secantei), prin urmare $AF \parallel CD$ și, deoarece $AF \equiv CD$, rezultă că patrulaterul $ACDF$ este dreptunghi.



Exerciții și probleme de dificultate minimă

a) 5 laturi; b) 6 laturi.

[illegible]

a) 6 laturi; b) 8 laturi.

a)

a) 1080° ; b) 1800° .

[illegible]

Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

Testul 1

Capitolele: Mulțimea numerelor reale, Patrulaterul și Cercul
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Numărul $\sqrt{0,01}$ aparține mulțimii:
A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.
- (7p) 2. Media aritmetică a numerelor $\sqrt{20}$ și $2\sqrt{45}$ este egală cu:
A. $3\sqrt{6}$; B. $2\sqrt{3}$; C. $6\sqrt{2}$; D. $4\sqrt{5}$.
- (7p) 3. Comparând numerele reale $a = 5\sqrt{3}$ și $b = 6\sqrt{2}$ obținem:
A. $a \geq b$; B. $a > b$; C. $a < b$; D. $a \leq b$.
- (7p) 4. Rezultatul calculului $3\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ este egal cu:
A. $12\sqrt{5}$; B. $6\sqrt{3}$; C. $9\sqrt{2}$; D. $10\sqrt{2}$.
- (7p) 5. Perimetrul paralelogramului cu $L = 15$ cm și $l = 8$ cm este egal cu:
A. 52 cm; B. 28 cm; C. 46 cm; D. 30 cm.
- (7p) 6. Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle A = 108^\circ$, atunci măsura unghiului C este egală cu:
A. 65° ; B. 72° ; C. 54° ; D. 90° .

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

- (8p) 1. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului real:
$$x = \left| (-\sqrt{2})^3 + (-\sqrt{2})^5 \right| : (-2\sqrt{6}).$$
- (8p) 2. Rotunjiți la prima zecimală numărul real $a = \left(\sqrt{0,5 \cdot 1,3(8)} - \frac{7}{30} \right) : \sqrt{1,3}$.
- (8p) 3. Media aritmetică ponderată a numerelor reale $3\sqrt{5}$ și $8\sqrt{5}$ cu ponderile 2, respectiv n este egală cu $6\sqrt{5}$. Determinați numărul natural n .
- (8p) 4. Pe un cerc se consideră punctele D , E și F în această ordine, astfel încât $\widehat{EDF} = 7\widehat{EF}$. Aflați măsura unghiului $\sphericalangle EDF$.
5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 7$ cm, $CD = 21$ cm și $\sphericalangle A = 2\sphericalangle D$.
- (8p) a) Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle D$.
- (8p) b) Calculați perimetrul trapezului $ABCD$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ

Testul 1

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	C	A	D	D	B	B	C	D

Partea a II-a: 1. $BC + AC > AB$, deci $BC = 10$ cm. 2. a) $x = \frac{11}{10} - \left(\frac{4}{3} \cdot 7 - \frac{3}{4} \cdot 1 \right) : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} - \frac{25}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{11}{10} - \frac{25}{10} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}$; b) $x = \frac{4}{15} = 0,2(6) = 0,266...$, deci rotunzind la a doua zecimală numărul rațional pozitiv x obținem 0,27. 3. a) $BC = 17$ cm; b) $\angle AED = 60^\circ$; c) $\triangle ADE$ este echilateral cu latura de 10 cm, prin urmare $\mathcal{P}_{ADE} = 30$ cm.

Testul 2

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	D	A	B	A	D	C	B	A

Partea a II-a: 1. $x = \frac{21}{40}$. 2. a) $a = 9$ și $b = 12$; b) $\frac{b}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1,3(3)$. 3. a) $\angle NFD = \angle EDF = 60^\circ$, deci $NF \parallel DE$; b) $NF \equiv MD$; $\angle F \equiv \angle D$ și $FD \equiv DE$, deci $\triangle NFD \equiv \triangle MDE$; c) $\triangle NFD \equiv \triangle MDE$, deci $\angle DNF = \angle EMD = 90^\circ$, deci $DN \perp FN$, dar $FN \parallel DE$, prin urmare $ND \perp DE$.

Testul 3

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	D	C	A	C	A	B	C	C

Partea a II-a: 1. $x \in \{0, 1, 2\}$. 2. a) $x < y$; b) $y : (x^2 - y) = \frac{17}{9} : \left(\frac{121}{36} - \frac{17}{9} \right) = \frac{17}{9} : \frac{53}{36} = \frac{68}{53}$. 3. a) $\angle BAD = \angle ABD = 45^\circ$, deci $AD \equiv BD$; b) $\angle ACE = 45^\circ$ și $\angle CDH = 90^\circ$, deci $\angle DHC = 45^\circ$; c) $AD \equiv BD$, $\angle ADH \equiv \angle BDC$ și $DH \equiv DC$, deci $\triangle ADH \equiv \triangle BDC$, așadar $AH \equiv BC$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) $16 = 4^2$; b) $36 = 6^2$; c) $49 = 7^2$; d) $64 = 8^2$; e) $81 = 9^2$; f) $100 = 10^2$; g) $144 = 12^2$; h) $196 = 14^2$; i) $324 = 18^2$; j) $400 = 20^2$. 2. a) Rădăcina pătrată a numărului natural 25 este 5 sau radical din 25 este egal cu 5. 3. a) A; b) A; c) A; d) A; e) F; f) A. 4. a) $\sqrt{16} = 4$; b) $\sqrt{25} = 5$; c) $\sqrt{36} = 6$; d) $\sqrt{49} = 7$; e) $\sqrt{64} = 8$; f) $\sqrt{100} = 10$; g) $\sqrt{121} = 11$; h) $\sqrt{144} = 12$; i) $\sqrt{225} = 15$; j) $\sqrt{256} = 16$. 5. a) $\sqrt{(-11)^2} = 11$; b) $\sqrt{(-23)^2} = 23$; c) $\sqrt{(-59)^2} = 59$; d) $\sqrt{(-77)^2} = 77$. 6. a) $A = \{-7, 7\}$; b) $B = \{-8, 8\}$; c) $C = \{-29, 29\}$; d) $D = \{-67, 67\}$. 7. a) 9; b) 1; c) 15; d) 13; e) 3; f) -4. 8. a) 90; b) -1; c) -2; d) -7. 9. a) A; b) A; c) A; d) A. 10. a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{8}{9}$; d) $\frac{5}{7}$; e) $\frac{9}{10}$; f) $\frac{7}{12}$; g) $\frac{15}{8}$; h) $\frac{14}{5}$. 11. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{5}{6}$; e) $\frac{4}{7}$; f) $\frac{5}{9}$. 12. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{3}{2}$;

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. A. 3. A. II. 1. $4\sqrt{5}$; **2.** $\sqrt{2}$; **3.** $-2\sqrt{2}$. **III. 1. C. 2. D. 3. B. IV.** $a = \frac{4}{9}$, $\sqrt{a} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

V. a) $x = \sqrt{2}$; b) $y = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{xy} = 2 \in \mathbb{N}$.

Lecția 12. Media aritmetică și media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$

1. 28; 32; 40; 35. **2.** 7; 8; 9; 12. **3.** $9\sqrt{6}$; $12\sqrt{5}$; $8\sqrt{7}$; $12\sqrt{3}$. **4.** $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $6\sqrt{5}$; $8\sqrt{7}$. **5.** a) 8; b) 7; c) 7; d) 6. **6.** a) $2\frac{1}{8}$; b) $1\frac{7}{24}$; c) $\frac{19}{36}$; d) $1\frac{21}{40}$. **7.** a) $\frac{25}{24}$; b) $\frac{47}{24}$; c) $\frac{61}{60}$; d) $\frac{17}{9}$. **8.** a) $y = 34\sqrt{2}$; b) $y = 30\sqrt{2}$; c) $y = 27\sqrt{2}$. **9.** a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{7}$; b) $3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$. **10.** a) $5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 7\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$. **11.** a) $1\frac{7}{8}$; b) $\frac{23}{36}$; c) $\frac{29}{54}$; d) $1\frac{13}{72}$. **12.** a) $y = 15\sqrt{7}$; b) $y = 7\sqrt{7}$; c) $y = 13\sqrt{7}$. **13.** a) $2\frac{1}{30}$; b) $\frac{167}{192}$. **14.** a) $\frac{43}{150}$; b) $\frac{77}{480}$. **15.** a) $5\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{7}$. **16.** a) $\frac{21\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{19\sqrt{3}}{2}$. **17.** a) $5\sqrt{7}$; b) $4\sqrt{5}$. **18.** a) $n = 5$; b) $n = 6$. **19.** a) $1\frac{9}{29}$; b) $2\frac{9}{22}$. **20.** a) $n = 3$; b) $n = 2$. **21.** a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **22.** 7,32. **23.** a) $n = 3$; b) $n = 5$. **24.** $a = 2\sqrt{7}$, $b = 6\sqrt{7}$, $c = 16\sqrt{7}$. **25.** Deoarece $\overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$ rezultă că $a \in \{0, 1\}$; $x < \overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$, deci $\overline{1,a38} = \frac{x+1,2a8}{2}$, de unde obținem $x \in \{0,868; 1,058\}$. **Test de evaluare stadială:** **1.** a) $3\sqrt{7}$; b) 2; c) $4\sqrt{3} + 3$. **2.** a) $5\sqrt{6}$; b) $\frac{59}{120}$. **3.** $2\sqrt{3}$.

Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive

1. B. 2. 4; 5; 6; 7. **3.** 6; 9; 8; 10. **4.** a) 14; b) 15; c) 12; d) 20. **5.** a) 5; b) 7; c) 4; d) 3. **6.** a) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$; b) $\frac{3\sqrt{7}}{5}$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; d) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$. **7.** a) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$; c) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$; d) $\frac{13\sqrt{5}}{15}$. **8.** a) 10; b) 15; c) 56; d) 63. **9.** a) $x = 32\sqrt{3}$; b) $x = 32\sqrt{2}$; c) $x = 12\sqrt{6}$; d) $x = 48\sqrt{3}$. **10.** a) $10\sqrt{2}$; b) $21\sqrt{3}$; c) $20\sqrt{2}$; d) $12\sqrt{7}$. **11.** a) $2\sqrt{21}$; b) $3\sqrt{10}$; c) $5\sqrt{14}$; d) $6\sqrt{14}$. **12.** a) $6\sqrt{\sqrt{3}}$; b) $10\sqrt{\sqrt{2}}$. **13.** a) $25\sqrt{6}$; b) $9\sqrt{5}$; c) $18\sqrt{3}$; d) $32\sqrt{7}$; e) $24\sqrt{2}$; f) $25\sqrt{7}$. **14.** $x + x^{-1} = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$. **15.** a) $x + y \geq 2\sqrt{x \cdot y}$, $y + z \geq 2\sqrt{y \cdot z}$ și $z + x \geq 2\sqrt{z \cdot x}$, prin urmare $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8\sqrt{x^2 y^2 z^2} = 8xyz$; b) $xy + 1 \geq 2\sqrt{xy}$, $yz + 1 \geq 2\sqrt{yz}$ și $zx + 1 \geq 2\sqrt{zx}$, prin urmare $(xy + 1)(yz + 1)(zx + 1) \geq 8xyz$. **16.** a) $x = \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$; $m_g = 2$; b) $x = \sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$; $m_g = 3$. **17.** a) $x = 4\sqrt{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{9}$; $m_g = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $x = 3\sqrt{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $m_g = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **18.** $x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \leq \frac{x(y+z)}{2} + \frac{y(z+x)}{2} + \frac{z(x+y)}{2} = \sqrt{x^2 y^2} + \sqrt{y^2 z^2} + \sqrt{z^2 x^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} = x^2 + y^2 + z^2$. **19.** $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$. **20.** Notând $b + c = x$, $c + a = y$, $a + b = z$ obținem

$\in \{-804, 804\}$. **Test de evaluare stadială:** 1. a) $x \in \{-9, 9\}$; b) $x \in \{-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\}$; c) $x \in \left\{-\frac{5\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right\}$. 2. $x \in \{-3, 13\}$. 3. $x \in \{-5 \cdot 2^{13}, 5 \cdot 2^{13}\}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $y = \sqrt{6}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$. 6. $n = 4$. **Testul 2.** 5. $y = 4\sqrt{5} - 3$. 6. $m_{ap} = 0,6$.

Testul 3. 5. $m_{ap} = \frac{5}{13}$. 6. $y = 4\sqrt{6}$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. 2. A. 3. A. II. 1. $2\sqrt{2}$. 2. $\emptyset$. 3. $\frac{1}{3}$. III. 1. A. 2. C. 3. D. IV. $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$.

V. a) $n = 6$; b) $x \in \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. $\mathcal{P} = 4 \cdot 15\sqrt{2} \text{ dm} > 4 \cdot 15 \cdot 1,41 \text{ dm} = 84,6 \text{ dm} > 84,5 \text{ dm}$. 2. $3,5 \text{ m}^2$. 3. 5850 kg . 4. 34 cărți. 5. 2,5 lei. 6. 8,75. 7. $2\sqrt{34} \text{ dm} = \sqrt{136} \text{ dm} > 3\sqrt{15} \text{ dm} = \sqrt{135} \text{ dm}$. 8. $\mathcal{P} = 10\sqrt{5} \cdot 4 \text{ m} < 40 \cdot 2,237 \text{ m} = 89,48 \text{ m} < 89,5 \text{ m}$. 9. Luna a doua. 10. $245\sqrt{3} \text{ km} > 245 \cdot 1,73 \text{ km} = 423,85 \text{ km}$; $423,85 : 60 = 7,06\dots$, deci automobilul nu poate parcurge distanța respectivă în 7 ore. 11. $\mathcal{A}_d = 30\sqrt{3} \text{ m}^2$; $\mathcal{A}_r = 30\sqrt{3} \text{ m}^2$, deci $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_r$. 12. 25 ani. 13. 7. 14. Laura, Irina, Ioana, Maria sau Maria, Irina, Ioana, Laura. 15. 94 spectatori. 16. $\mathcal{V}_c = 250\sqrt{2} \text{ dm}^3 > 250 \cdot 1,41 \text{ dm}^3 = 352,5 \text{ dm}^3 = 352,5 \text{ l}$. 17. Ștefan, Andrei și Mihai au aceeași vârstă. 18. Dan și Ion au aceeași vârstă. 19. 2 ani sau 3 ani sau 4 ani sau 6 ani. 20. Vali – 1 an, Ion – 3 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 9 ani sau Vali – 2 ani, Ion – 4 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 8 ani.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERUL

Lecția 1. Patrulaterul convex

1. $MNPQ$. 3. a) A; b) F; c) F; d) A. 4. a) F; b) F; c) A; d) A. 5. C. 360° . 6. A. 7. a) $\sphericalangle D = 110^\circ$; b) $\sphericalangle A = 85^\circ$. 8. a) $\mathcal{P}_{MNPQ} = 23 \text{ cm}$; b) $\mathcal{P}_{MNPQ} = 24 \text{ cm}$. 9. F. 10. a) $AD = 12 \text{ cm}$; b) $BC = 8,5 \text{ cm}$. 11. a) $\sphericalangle M = 36^\circ$, $\sphericalangle N = 72^\circ$, $\sphericalangle P = 108^\circ$, $\sphericalangle Q = 144^\circ$; b) $\sphericalangle M = 96^\circ$, $\sphericalangle N = 24^\circ$, $\sphericalangle P = 120^\circ$, $\sphericalangle Q = 120^\circ$. 12. Notăm cu x° , $(x+2)^\circ$, $(x+4)^\circ$ și $(x+6)^\circ$ măsurile celor 4 unghiuri; $x^\circ + x^\circ + 2^\circ + x^\circ + 4^\circ + x^\circ + 6^\circ = 360^\circ$ sau $4x^\circ + 12^\circ = 360^\circ$, deci $4x^\circ = 348^\circ$, așadar $x^\circ = 87^\circ$, prin urmare unghiurile au măsurile de 87° , 89° , 91° , 93° . 13. a) $DE = EF = 30 \text{ cm}$, $FG = 10 \text{ cm}$, $GD = 20 \text{ cm}$; b) $EF = FG = 30 \text{ cm}$, $GD = 7,5 \text{ cm}$, $DE = 22,5 \text{ cm}$. 14. a) $\sphericalangle A = 51^\circ$, $\sphericalangle B = 102^\circ$, $\sphericalangle C = 101^\circ$, $\sphericalangle D = 106^\circ$; b) $\sphericalangle A = 81^\circ$, $\sphericalangle B = 138^\circ$, $\sphericalangle C = 95^\circ$, $\sphericalangle D = 46^\circ$. 15. a) $AB = 19 \text{ cm}$, $BC = 38 \text{ cm}$, $CD = 32 \text{ cm}$ și $DA = 11 \text{ cm}$; b) $AB = 30 \text{ cm}$, $BC = 45 \text{ cm}$, $CD = 10 \text{ cm}$ și $DA = 15 \text{ cm}$. 16. a) $\sphericalangle D = 120^\circ$, $\sphericalangle E = 72^\circ$, $\sphericalangle F = 96^\circ$ și $\sphericalangle G = 72^\circ$; b) a) $\sphericalangle D = 30^\circ$, $\sphericalangle E = 60^\circ$, $\sphericalangle F = 120^\circ$ și $\sphericalangle G = 150^\circ$. 17. a) $\sphericalangle M = 60^\circ$, $\sphericalangle N = 70^\circ$, $\sphericalangle P = 100^\circ$, $\sphericalangle Q = 130^\circ$; b) $\sphericalangle M = 64^\circ$, $\sphericalangle N = 72^\circ$, $\sphericalangle P = 104^\circ$, $\sphericalangle Q = 120^\circ$. 18. a) $\sphericalangle D = 150^\circ$, $\sphericalangle E = 120^\circ$, $\sphericalangle F = 75^\circ$, $\sphericalangle G = 15^\circ$; b) $\sphericalangle D = 144^\circ$, $\sphericalangle E = 108^\circ$, $\sphericalangle F = 72^\circ$, $\sphericalangle G = 36^\circ$. 19. $AC < AB + BC$ și $AC < AD + DC$, deci $2AC < \mathcal{P}_{ABCD}$ și analog se arată că $2BD < \mathcal{P}_{ABCD}$, prin urmare $2(AC + BD) < 2\mathcal{P}_{ABCD}$, de unde rezultă că $AC + BD < \mathcal{P}_{ABCD}$. 20. a) $\mathcal{P}_{ABD} + \mathcal{P}_{BCD} = \mathcal{P}_{ACD} + \mathcal{P}_{ABC}$, sau $2BD = 2AC$, deci $AC \equiv BD$; b) $\mathcal{P}_{ABD} = \mathcal{P}_{ACD}$ și $AC \equiv BD$, prin urmare $AB \equiv CD$.

Test de evaluare stadială: 1. $\sphericalangle F = 85^\circ$. 2. $\sphericalangle M = 90^\circ$. 3. $AC = 9 \text{ cm}$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. A. 3. A. II. 1. 81 cm^2 . **2.** 9 cm . **3.** 27 cm^2 . **III. 1. C. 2. D. 3. B. IV.** $\triangle TAB \equiv \triangle TDC$, deci $\angle TAB \equiv \angle TDC$ și $\angle TBA \equiv \angle TCD$, dar $\angle TAD \equiv \angle TDA$ și $\angle TBC \equiv \angle TCB$, prin urmare $\angle BAD \equiv \angle CDA$ și $\angle ABC \equiv \angle DCB$, deci $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$, de unde rezultă că $AD \parallel BC$, așadar $ABCD$ este trapez isoscel. **V. a)** Observăm că $\angle ADB = \angle BDC = \angle ACD = 30^\circ$, deci $\angle DAC = 90^\circ$, prin urmare $CD = 2AD = 60 \text{ cm}$; $\mathcal{P}_{ABCD} = 150 \text{ cm}$; **b)** În $\triangle ADO$, $DO = 2AO$, deci $CO = 2OA$, prin urmare $OC \equiv OE$ și analog se arată că $OD \equiv OF$, de unde rezultă că $CDEF$ este dreptunghi. Din $\triangle CDE$ obținem $DE = \frac{CE}{2} = 34 \text{ cm}$; $\mathcal{A}_{CDEF} = 2040 \text{ cm}^2$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. 96 stâlpi. **2.** $\mathcal{A}_{DEFC} = 16,5 \text{ dm}^2$. **3.** $\mathcal{P}_{DMCN} = 16 \text{ dm}$. **4.** 16 m . **5.** Cantitățile sunt egale. **6.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 44 \text{ m}^2$. **7.** 12 m^2 . **8.** $\angle A = \angle B = 120^\circ$ și $\angle C = \angle D = 60^\circ$. **9.** 800 m^2 . **10.** 5429 m^2 , 2492 m^2 . **11. a)** $d(A, \widehat{CD}) + d(B, \widehat{CD}) = 1,3 \text{ m}$; **b)** $d(A, \widehat{CD}) = 1,3 \text{ m}$. **12.** $\mathcal{A}_{AMCN} = 100 \text{ dam}^2$. **13.** $\mathcal{A}_{EFGH} = 50\% \mathcal{A}_{ABCD}$. **14.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 9 \text{ m}$. **15.** $EF = 8 \text{ m}$. **16.** $\mathcal{A}_{ABCD} = 200 \text{ dam}^2$. **17.** 54 m^2 de parchet. **18.** $\mathcal{A} = 490 \text{ m}^2$. **19.** 108 m . **20.** $BD = 2 \text{ km}$, $DC = 4 \text{ km}$.

CAPITOLUL II. CERCUL

Lecția 12. Unghi înscris în cerc

1. C. 2. a) $\widehat{MN} = 54^\circ$; **b)** $\angle MON = 48^\circ$. **3. a)** $\widehat{EF} = 60^\circ$; $\widehat{EDF} = 300^\circ$; **b)** $\widehat{EF} = 72^\circ$; $\widehat{EDF} = 288^\circ$. **4. a)** F; **b)** A. **5. a)** $\angle EDF = 20^\circ$; **b)** $\angle EDF = 37^\circ$; **c)** $\angle EDF = 48^\circ$. **6. a)** $\widehat{EF} = 30^\circ$; **b)** $\widehat{EF} = 52^\circ$; **c)** $\widehat{EF} = 90^\circ$. **7. a)** $\angle A = 77^\circ$, $\angle B = 67^\circ$ și $\angle C = 36^\circ$; **b)** $\angle A = 30^\circ 30'$, $\angle B = 85^\circ$ și $\angle C = 64^\circ 30'$. **8. a)** $\widehat{AB} = 170^\circ$, $\widehat{BC} = 80^\circ$ și $\widehat{CA} = 110^\circ$; **b)** $\widehat{AB} = 146^\circ$, $\widehat{BC} = 92^\circ$ și $\widehat{CA} = 122^\circ$. **9.** $\angle MPN = 90^\circ$. **10.** $EF = 14\sqrt{5} \text{ cm}$. **11. a)** $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ și $\angle C = 50^\circ$; **b)** $\angle A = 63^\circ$, $\angle B = 72^\circ$ și $\angle C = 45^\circ$. **12. a)** $\widehat{AB} = 136^\circ$, $\widehat{BC} = 96^\circ$ și $\widehat{CA} = 128^\circ$; **b)** $\widehat{AB} = 138^\circ$, $\widehat{BC} = 102^\circ$ și $\widehat{CA} = 120^\circ$. **13. a)** $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 48^\circ$ și $\angle C = 72^\circ$; **b)** $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$ și $\angle C = 75^\circ$. **14. a)** Cum $\angle ACB = 45^\circ$, rezultă că $\angle AOB = 90^\circ$ și obținem $R = 7 \text{ cm}$; **b)** Analog obținem $R = 9 \text{ cm}$. **15. a)** $EF = 6\sqrt{2} \text{ cm}$; **b)** $EF = 5\sqrt{2} \text{ cm}$. **16.** Observăm că $\triangle OAB$ este echilateral, deci $\angle AOB = 60^\circ$, prin urmare $\angle ACB \in \{30^\circ; 150^\circ\}$. **17. a)** Cum $\angle BAO = 23^\circ$, rezultă că $\angle AOB = 134^\circ$, deci $\angle ACB = 67^\circ$. Analog obținem $\angle BAC = 53^\circ$, deci $\angle ABC = 60^\circ$; **b)** $\angle BAC = 53^\circ$, $\angle ABC = 51^\circ$ și $\angle BCA = 76^\circ$. **18.** Dacă $E \in \widehat{BD}$, atunci $ABED$ și $ADCF$ sunt inscriptibile, deci $\angle EAB = \angle FAC = \angle BDE$, așadar $\angle BAC \equiv \angle EAF$. **19.** Dacă notăm cu h înălțimea $\triangle OEF$, rezultă că $h = \frac{R}{2}$, prin urmare înălțimea se opune unui unghi cu măsura de 30° , deci $\angle EOF \in \{30^\circ; 150^\circ\}$ și $\angle EDF \in \{15^\circ; 75^\circ\}$. **20.** Patrulateralele $AEFC$ și $EBDF$ sunt inscriptibile; $\angle BDF + \angle BEF = 180^\circ$, deci $\angle BDF \equiv \angle AEF$; $\angle AEF + \angle ACF = 180^\circ$, prin urmare $\angle BDC + \angle ACD = 180^\circ$, de unde rezultă că $AC \parallel BD$. **21.** Construim $DM \perp AB$, $M \in AB$ și $DN \perp AC$, $N \in AC$ și observăm că $\triangle DMB \equiv \triangle DNC$, deci $\angle DBA \equiv \angle DCA$, prin urmare punctele A, B, C și D sunt conciclice. **22.** $BCEF$ este inscriptibil, deci $\angle FBE \equiv \angle ECF$ (1). Din patrulateralele inscriptibile $BDHF$ și $CDHE$ rezultă $\angle FBH \equiv \angle FDH$, respectiv $\angle ECH \equiv \angle EDH$ și folosind (1) obținem $\angle FDH \equiv \angle EDH$; analog obținem $\angle EFH \equiv \angle DFH$, de unde rezultă concluzia. **23.** Notăm cu D al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor AMP și CPN și observăm că $\angle ABC + \angle MDN = 180^\circ$, deci $BMDN$ este inscriptibil, prin urmare cele trei cercuri au în comun punctul D . **24.** Se arată că $\angle APN = 90^\circ$, deci $APND$ este inscriptibil, prin urmare $\angle APD \equiv \angle AND$ și $\angle PAD \equiv \angle BNC$, dar $\angle AND \equiv \angle BNC$, deci $\angle APD \equiv \angle PAD$, așadar $DP = DA = l$. **25.** Dacă DE și DF sunt diametre în cercurile circumscrise triunghiurilor ABD , respectiv ACD , rezultă că punctele E, A și F sunt coliniare. $\angle E \equiv \angle B$ și $\angle F \equiv \angle C$, deci $\angle E \equiv \angle F$, prin urmare $DE \equiv DF$. **26.** Considerăm punctul $E \in AD$, astfel încât $DE \equiv DC$ și, deoarece $\angle ADC = 60^\circ$, rezultă că $\triangle EDC$ este echilateral, deci $EC \equiv DC$, prin urmare $\triangle AEC \equiv \triangle BDC$, de unde rezultă că $AE \equiv BD$, deci $AD = BD + CD$. **27.** Fie T punctul diametral opus punctului D .